

Les vecteurs

Stage de prérentrée — Seconde • Jour 4

Objectifs d'apprentissage

- Comprendre ce qu'est un **vecteur** (direction, sens, longueur) et l'**égalité** de deux vecteurs.
- Lire et calculer les **coordonnées** d'un vecteur dans un repère : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Calculer une **longueur** (norme) : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Maîtriser les **opérations** : somme (relation de Chasles), différence, produit par un réel.
- Utiliser la **colinéarité** pour démontrer un **parallélisme** ou un **alignement**.

I. La notion de vecteur

Définition — vecteur et translation

Un **vecteur** est un « trajet » que l'on représente par une **flèche**. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ traduit le **déplacement** (la *translation*) qui amène le point A sur le point B .

Il est entièrement défini par trois caractéristiques :

- sa **direction** (celle de la droite (AB)) ;
- son **sens** (de A vers B) ;
- sa **longueur** (la distance AB), aussi appelée **norme** et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même longueur**.

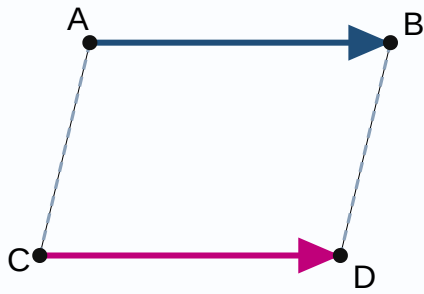
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

Attention à l'ordre des lettres : dans le parallélogramme $ABDC$, les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur.

$ABDC$ est un parallélogramme

Cas particuliers

Vecteur nul : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (déplacement « sur place », longueur 0).



Vecteurs opposés : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Ils ont même direction, même longueur, mais des **sens contraires**.

À toi de jouer

$ABDC$ est un parallélogramme.

1. Cite un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.
2. Cite un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.
3. Que vaut $\overrightarrow{DC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$?

Corrigé

► Afficher le corrigé

II. Coordonnées d'un vecteur

Définition

On se place dans un repère $(O; I, J)$. Pour deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

On calcule toujours « **arrivée** — **départ** » : abscisse de B moins abscisse de A , puis ordonnée de B moins ordonnée de A .

Dans l'autre sens : trouver l'extrémité d'un vecteur (translation)

Si on connaît le point de départ $A(x_A; y_A)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le point d'arrivée B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ s'obtient en **ajoutant le vecteur au point de départ** :

$$B(x_A + a; y_A + b)$$

Exemple : $A(2; -1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow B(2 + 3; -1 + 4) = B(5; 3)$.

Longueur (norme) d'un vecteur

Dans un repère **orthonormé**, la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire la distance AB) est :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

C'est le théorème de Pythagore appliqué au repère.

Exemple rédigé

Soit $A(5; 3)$ et $B(-4; 3)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 - 5 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} ; AB = \sqrt{(-9)^2 + 0^2} = \sqrt{81} = 9.$$

À toi de jouer

Dans un repère orthonormé : $A(3; 4)$,
 $B(2; 5)$, $C(-1; 3)$.

1. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.

2. Calcule la longueur AC .

3. Place D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ avec
 $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$: quelles sont les coordonnées
de D ?

Corrigé

► Afficher le corrigé

III. Opérations sur les vecteurs

a) Somme de deux vecteurs — relation de Chasles

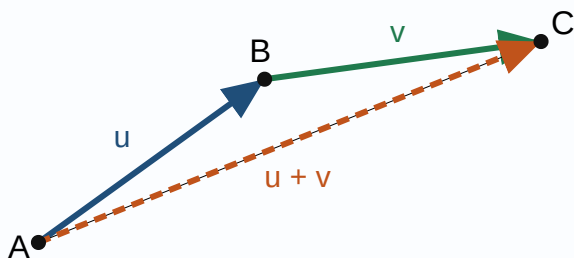
Pour « enchaîner » deux déplacements, on utilise la **relation de Chasles** : quelle que soit la position des points,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

On peut aussi construire la somme avec un **parallélogramme** lorsque les deux vecteurs ont la même origine.

En coordonnées, on additionne composante par composante : si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Relation de Chasles



b) Différence et opposé

Soustraire un vecteur revient à **ajouter son opposé** : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

En coordonnées : $\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$.

c) Produit par un réel

Pour un réel λ , le vecteur $\lambda\vec{u}$ a la **même direction** que $\vec{u}$; même sens si $\lambda > 0$, sens contraire si $\lambda < 0$; sa longueur est $|\lambda|$ fois celle de $\vec{u}$.

En coordonnées : $\lambda\vec{u} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Exemple rédigé

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2 + (-3) \\ 3 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} ; 2\vec{u} + 3\vec{v} \begin{pmatrix} 2(2) + 3(-3) \\ 2(3) + 3(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

À toi de jouer

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. $\vec{u} + \vec{w}$ 2. $\vec{u} - \vec{v}$ 3. $5\vec{u} - 2\vec{v}$

Corrigé

► Afficher le corrigé

IV. Colinéarité, parallélisme & alignement

Définition & critère

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (non nuls) sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la **même direction**.

Propriété. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff$ il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Critère par les coordonnées. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires} \iff x y' - y x' = 0$$

Démontrer un parallélisme

Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

Démontrer un alignement

Les points A, B, C sont **alignés** lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Exemple rédigé — alignement

Soit $A(1; 2)$, $B(3; 5)$ et $C(7; 11)$. Les points sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. On calcule le déterminant : $2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : A, B, C sont alignés. ■

À toi de jouer

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
2. $A(0; 1)$, $B(2; 5)$, $C(3; 8)$: les points A, B, C sont-ils alignés ?

Corrigé

► Afficher le corrigé

Ce que je retiens

L'essentiel des vecteurs

- **Coordonnées** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ (arrivée — départ).
- **Longueur** : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (repère orthonormé).
- **Opérations** : on additionne / soustrait / multiplie **coordonnée par coordonnée** ;
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles).
- **Colinéarité** : $x y' - y x' = 0 \rightarrow$ parallélisme $(AB) \parallel (CD)$ ou alignement de A, B, C .

